Компьютерная графика
Москва
Лекция 6
17/18 октября 2013

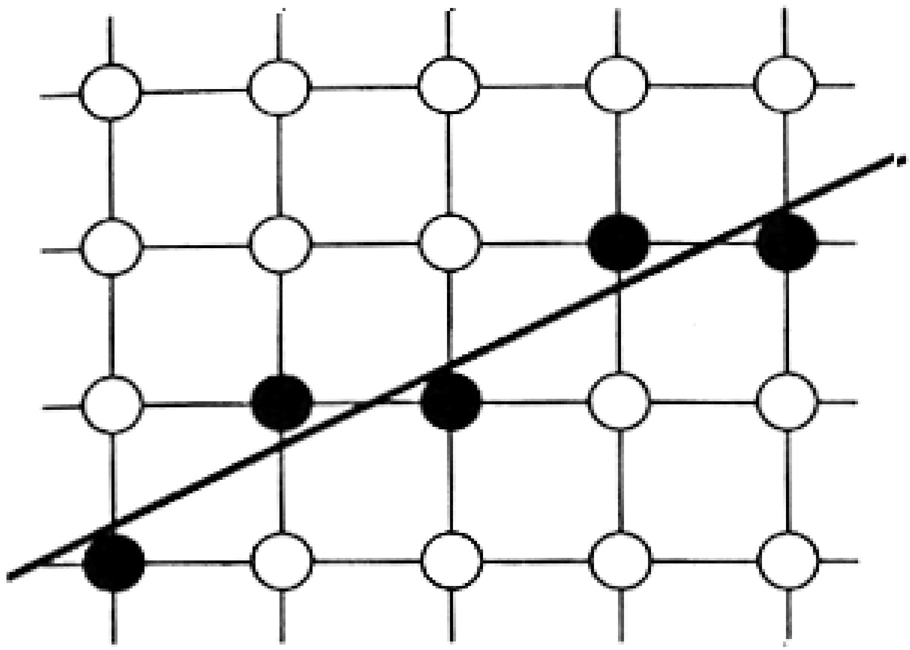
Прямые. Кривые. Поверхности.

Алексей Викторович Игнатенко
Лаборатория компьютерной графики и мультимедиа
ВМК МГУ

На лекции

- Алгоритм Брезенхема для прямых
- Алгоритм Брезенхема для окружностей
- Сплайновые кривые
  - Геометрическая непрерывность
  - Кривые Эрмита
  - B-сплайны
  - Кривые Безье (Полиномы Бернштейна, Алгоритм Де Костельжо)
  - Поверхности Безье
  - Рациональные сплайны

Алгоритм Брезенхема для растеризации прямых

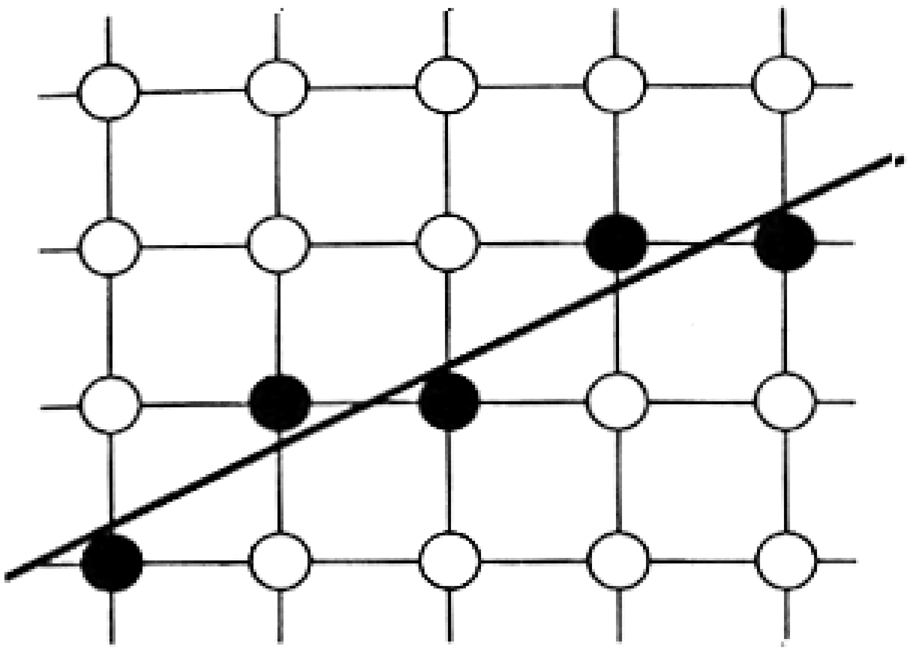


Задача
построить отрезок
$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$

Уравнение прямой

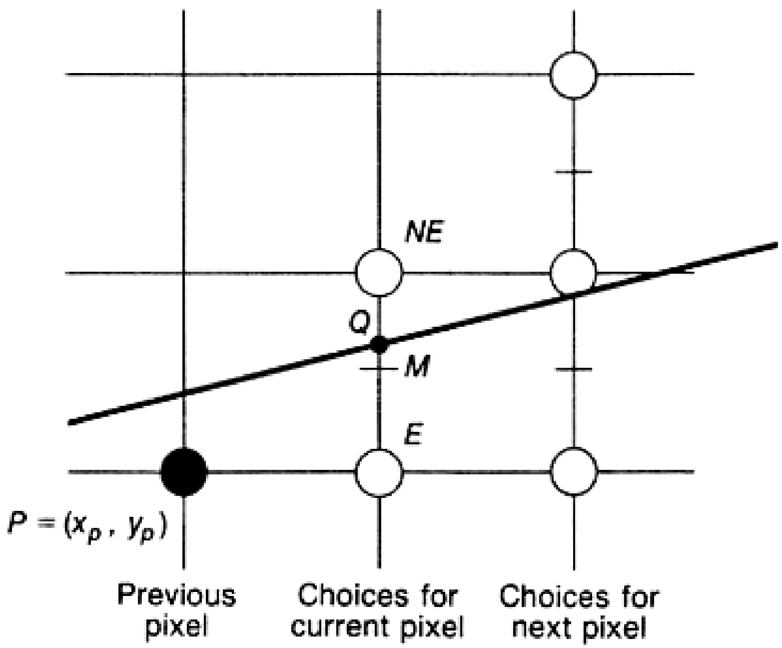
$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), x \in [x_1, x_2]$$

Ограничимся рассмотрением только направлений «вправо-вверх»



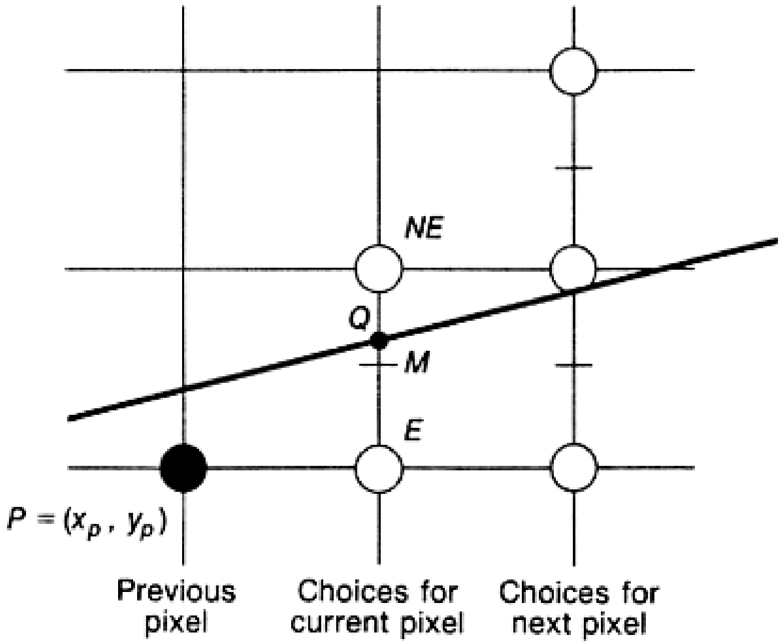
- Рассматриваем направление «вправо-вверх», угол с осью x меньше 45 градусов $0 \le y_2 - y_1 \le x_2 - x\_1$
- Другие направления могут быть получены отражением

Идея алгоритма Брезенхема: инкрементный выбор y-координаты следующей точки



- Знаем положение пикселя $P(x_p, y_p)$
- Для пикселя $x_p + 1$ есть варианты выбора y:
  - $E\ (y_p)$
  - $NE\ \left(y_p + 1\right)$
- Выбираем нужный пиксель в зависимости от положения точки M относительно точки Q
- Повторяем до достижения конца отрезка

Функция F – индикатор положения точки прямой относительно середины



Определим функцию F:

$$F(x, y) = (x - x_1)dy - (y - y_1)dx$$

где

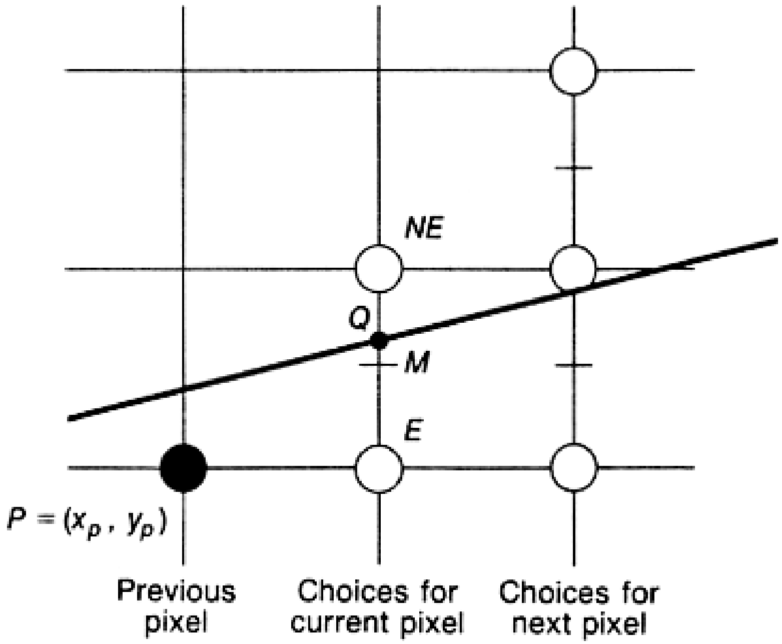
$$dx = x_2 - x_1$$

$$dy = y_2 - y_1$$

Свойства F:

- $F(x, y) = 0$ точка на отрезке
- $F(x, y) < 0$ точка выше отрезка
- $F(x, y) > 0$ точка ниже отрезка

Вычисляем значение d



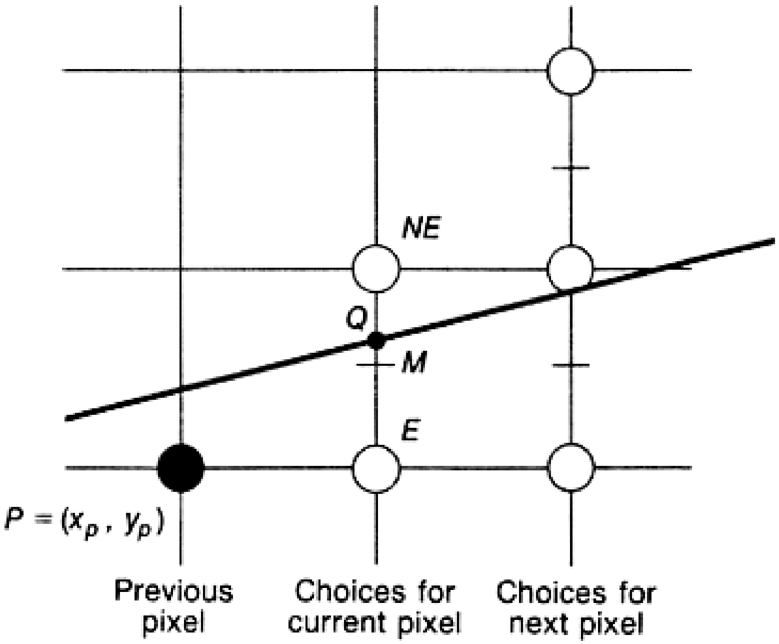
Координаты точки

$$\mathrm{M} = \left(x_p + 1, y_p + {}^{1}/_{2}\right)$$

Считаем значение функции F в этой точке:

$$d = F(M) = F(x_p + 1, y_p + {}^{1}/_{2})$$

Инкрементный алгоритм (d<0)



$$F(x, y) = (x - x_1)dx - (y - y_1)dy$$

Если d<0, то выбираем E. Тогда

$$d_{new} = F\left(x_p + 2, y_p + {}^{1}/_{2}\right)$$

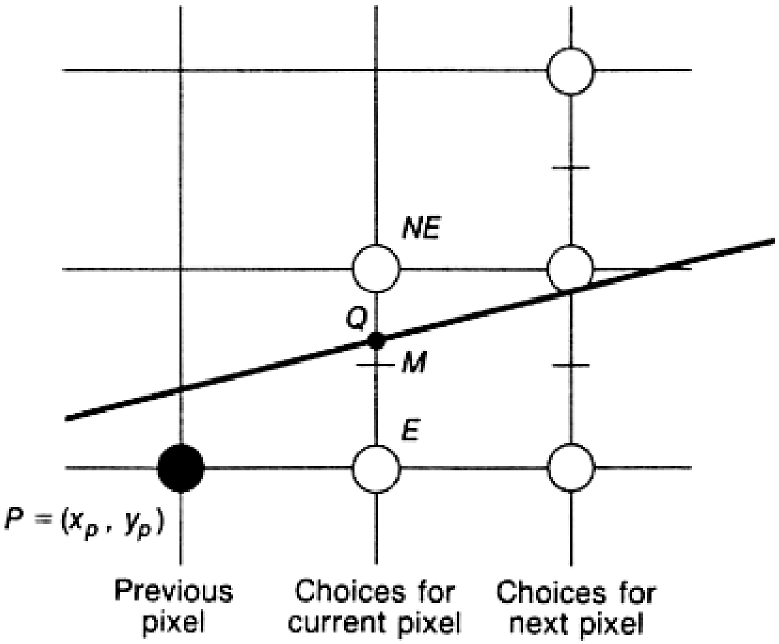
Можно ли посчитать d_{new} без вычисления F ? Да.

$$d_{new} - d_{old}$$

$$= \Big(\left(\mathrm{x_p} + 2 - \mathrm{x_1}\right)\mathrm{dy} - \cancel{\left(\mathrm{y_p} + {}^{1}/_{2} - y_1\right)dx}\Big) - \Big(\left(x_p + 1 - x_1\right)dy - \cancel{\left(y_p + {}^{1}/_{2} - y_1\right)dx}\Big) = dy$$

$$= \mathrm{y_2} - \mathrm{y_1}$$

Инкрементный алгоритм (d>=0)



$$F(x, y) = (x - x_1)dx - (y - y_1)dy$$

Если d>=0, то выбираем NE. Тогда

$$d_{new} = F\left(x_p + 2, y_p + {}^{3}/_{2}\right)$$

Можно ли посчитать d_{new} без вычисления F ? Да.

$$\begin{aligned} d_{new} - d_{old} &\\ &= \Big(\big(\mathrm{x_p} + 2 - \mathrm{x_1}\big)\mathrm{dy} \\ &- \big(\mathrm{y_p} + {}^{1}/_{2} - y_1\big)dx\Big) \\ &- \Big(\big(x_p + 1 - x_1\big)dy \\ &- \big(y_p + {}^{3}/_{2} - y_1\big)dx\Big) = dy - \mathrm{dx} \\ &= (\mathrm{y_2} - \mathrm{y_1}) - (\mathrm{x_2} - \mathrm{x_1}) \end{aligned}$$

Инкрементное вычисление значения d

- Вычисляем d
- Если $d < 0$, выбираем E и $d_{new} = d + \Delta E$
- Если $d \geq 0$, выбираем NE и $d_{new} = d + \Delta NE$
  где $\Delta E = dy, \Delta NE = dy - dx$

Еще нужно вычислить первое значение d_{start}

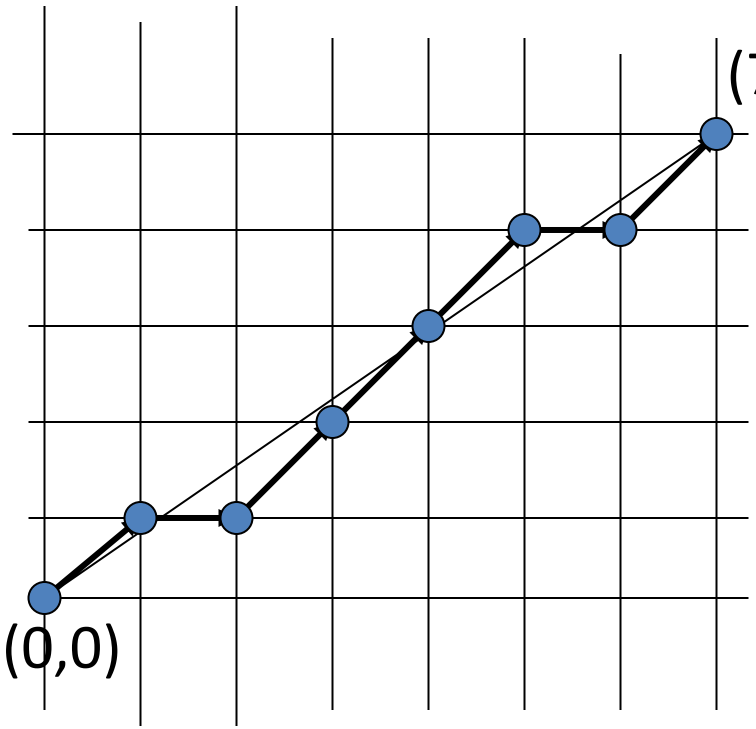
$$
\begin{aligned}
d_{start} &= F\left(x_1 + 1, y_1 + {}^{1}/_{2}\right) \\
&= (x_1 + 1 - x_1)dy - \left(y_1 + {}^{1}/_{2} - y_1\right)dx \\
&= dy - {}^{dx}/_{2}
\end{aligned}
$$

Переход к целочисленной арифметике через устранения деления на 2

- $F'(x, y) = 2F(x, y)$
- $d' = 2d$
- $d_{start} = 2dy - dx$
- $\Delta_N{}' = 2\Delta_N, \Delta_{NE}{}' = 2\Delta_{\mathrm{NE}}$

Пример работы алгоритма Брезенхема

$$\boxed{d_{start} = 2dy - dx = 3; d_{NE} = -4; d_{E} = 10}$$



d0 = 10 - 7 = 3 > 0 (NE)

d1 = 3 - 4 = -1 < 0 (E)

d2 = -1 + 10 = 9 (NE)

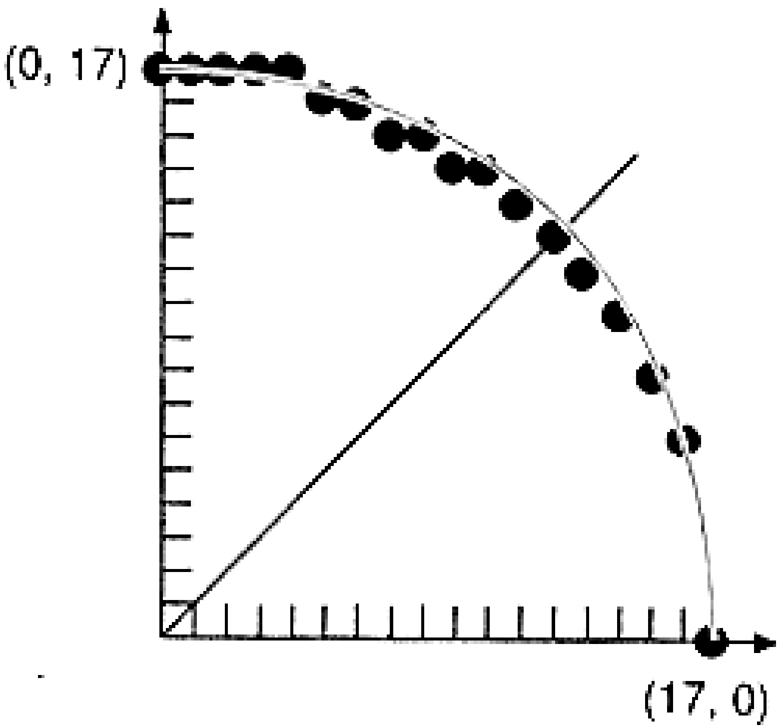
d3 = 9 - 4 = 5 (NE)

d4 = 5 - 4 = 1 (NE)

d5 = 1 - 4 = -3 (E)

d6 = -3 + 10 = 7 (NE)

Алгоритм Брезенхема для окружности



Задача: растеризовать окружность с центром в начале координат и радиусом R

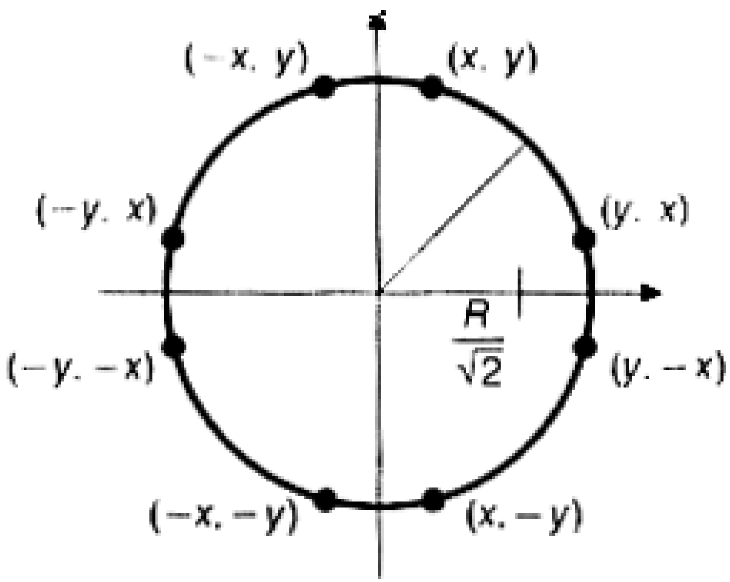
Явное и неявное представление

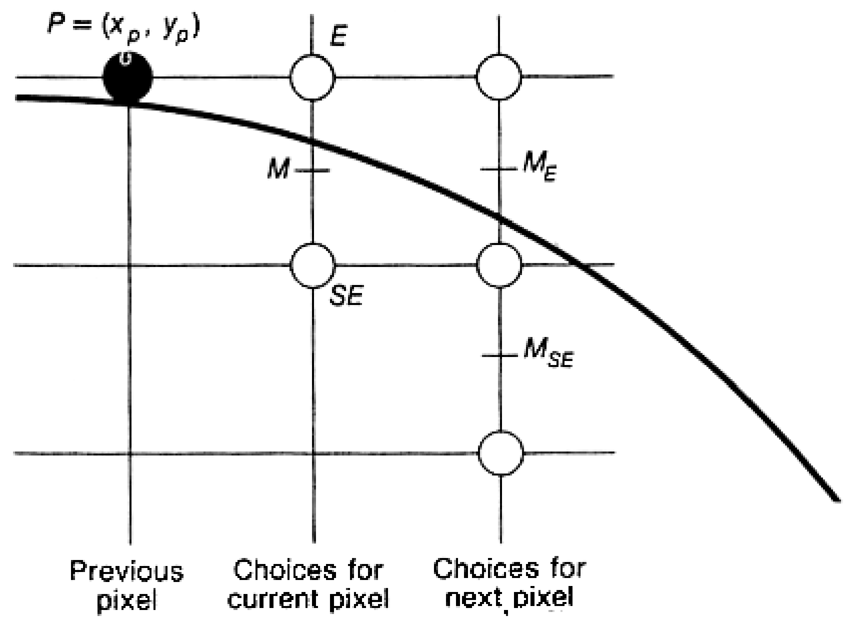
$$x^2 + y^2 = R^2$$
$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$$

Параметрическое представление

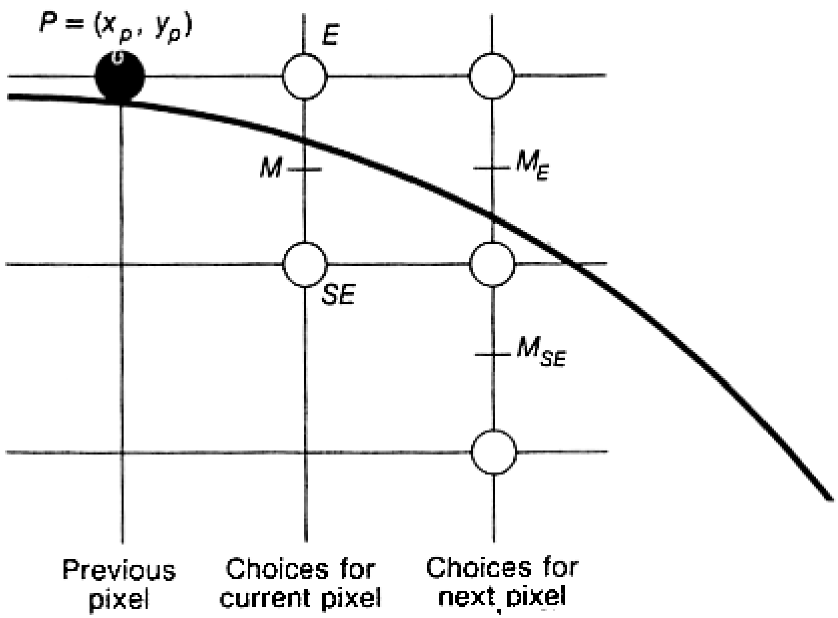
$$x = r cos\theta$$
$$y = r sin\theta$$

Ограничение: четверть окружности



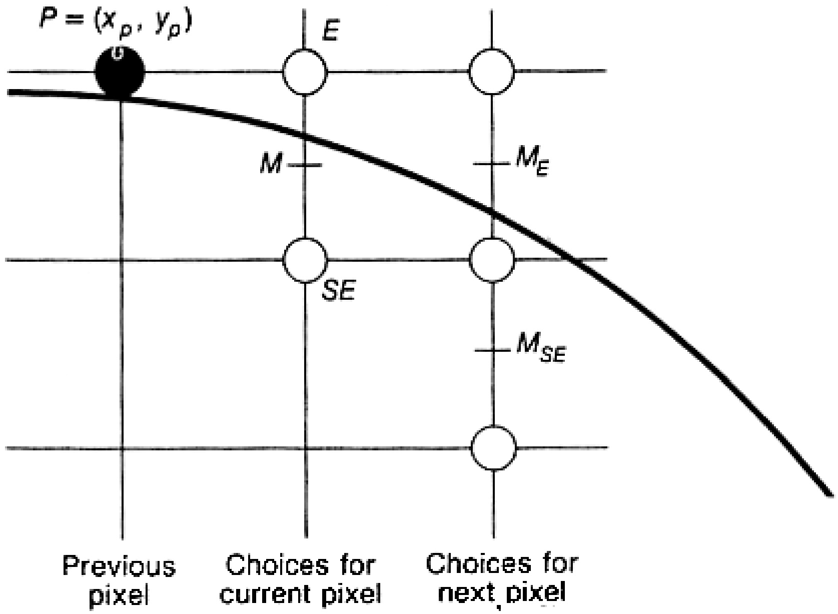


Аналогичная отрезку идея: выбор y-координаты следующей точки



- Знаем положение пикселя $P(x_p, y_p)$
- Для пикселя $x_p + 1$ есть варианты выбора y:
  - $E\ (y_p)$
  - S$E\ \left(y_p - 1\right)$
- Выбираем нужный пиксель в зависимости от положения точки M
- Повторяем до достижения оси x

Функция F – индикатор положения точки окружности относительно середины



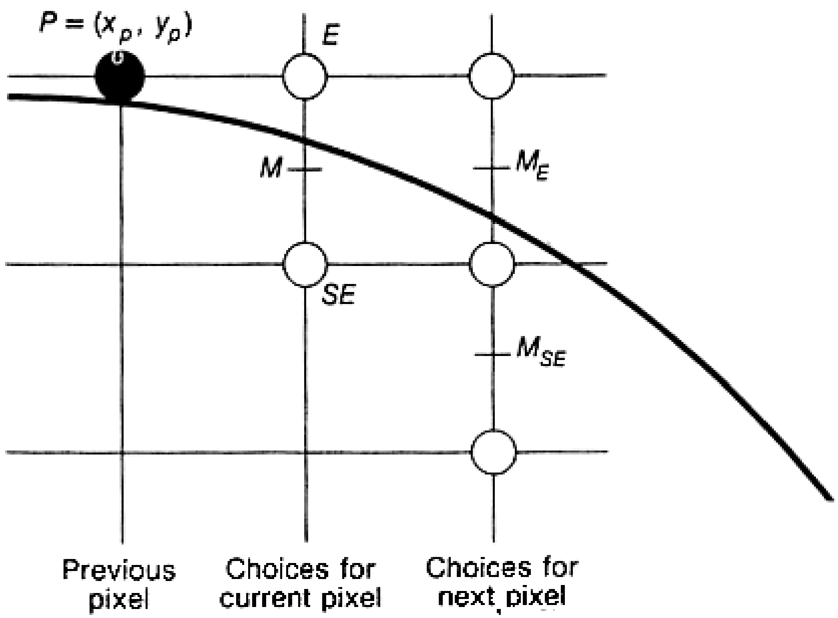
Определим функцию F:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$$

Свойства F:

- $F(x, y) = 0$ точка на кривой
- $F(x, y) < 0$ точка выше кривой
- $F(x, y) > 0$ точка ниже кривой

Вычисляем значение d



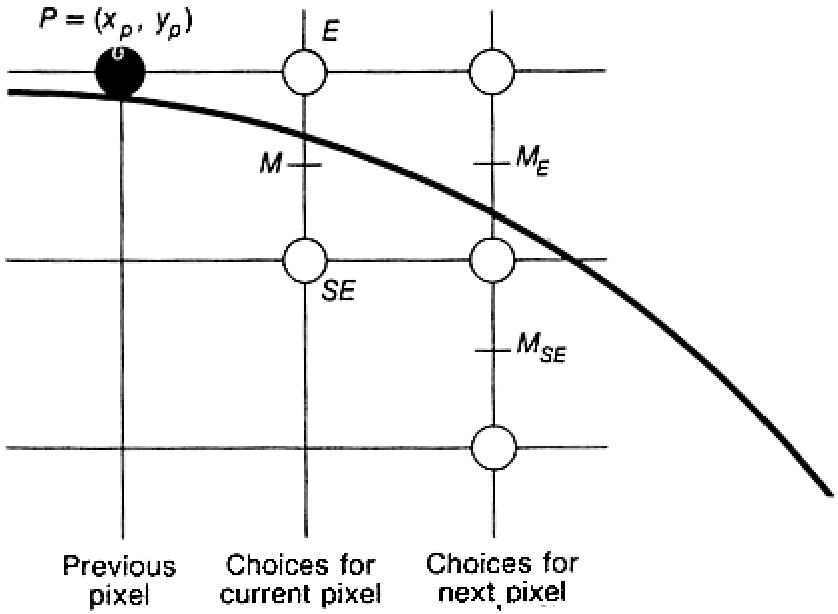
Координаты точки

$$M = \left(x_p + 1, y_p - {}^{1}/_{2}\right)$$

Считаем значение функции F в этой точке:

$$d = F(M) = F(x_p + 1, y_p - {}^{1}/_{2})$$

Инкрементный алгоритм (d<0)



$$F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$$

Если d<0, то выбираем SE

$$d_{new} = F\left(x_p + 2, y_p - {}^3/_2\right)$$

Можно ли посчитать d_new без вычисления F ? Да.

$$d_{new} - \mathrm{d_{old}}$$

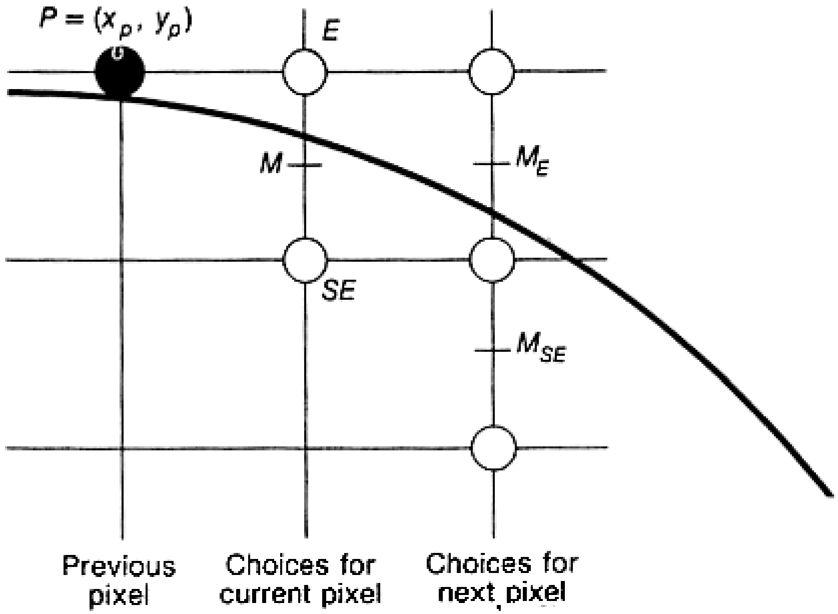
$$= \left(\mathrm{x_p} + 2\right)^2 + \left(\mathrm{y_p} - \frac{1}{2}\right)^2 - \mathrm{R}^2$$

$$- \left(\mathrm{x_p} + 1\right)^2 - \left(\mathrm{y_p} - \frac{3}{2}\right)^2 + \mathrm{R}^2$$

$$= 2\mathrm{x_p} + 3 - 2\mathrm{y_p} + 2$$

$$= 2\mathrm{x_p} - 2\mathrm{y_p} + 5$$

Инкрементный алгоритм (d>=0)



$$F(x,y) = (x - x_1)dx - (y - y_1)dy$$

Если d>=0, то выбираем E

$$d_{new} = F\left(x_p + 2, y_p - \frac{1}{2}\right)$$

Можно ли посчитать d_new без вычисления F ? Да.

$$d_{new} - d_{old} = \left(x_p + 2\right)^2 + \left(y_p - \frac{1}{2}\right)^2 - R^2 - \left(x_p + 1\right)^2 - \left(y_p - \frac{1}{2}\right)^2 + R^2 = 2x_p + 3$$

Инкрементное вычисление значения d

- Вычисляем d
- Если $d < 0$, выбираем SE и $d_{new} = d + \Delta_{SE}$
- Если $d \geq 0$, выбираем E и $d_{new} = d + \Delta_E$
  где $\Delta_E = 2x_p + 3, \Delta_{SE} = 2x_p - 2y_p + 5$

Еще нужно вычислить первое значение d_{start} в точке $(0, R)$

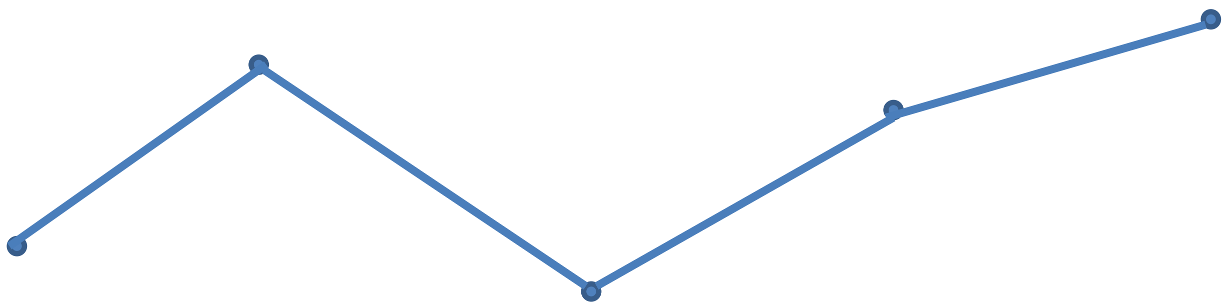
$$d_{start} = F\left(1, R - \frac{1}{2}\right) = 1^2 + R^2 - R + \frac{1}{4} - R^2 = \frac{5}{4} - R$$

Опять нужен переход к целочисленной арифметике

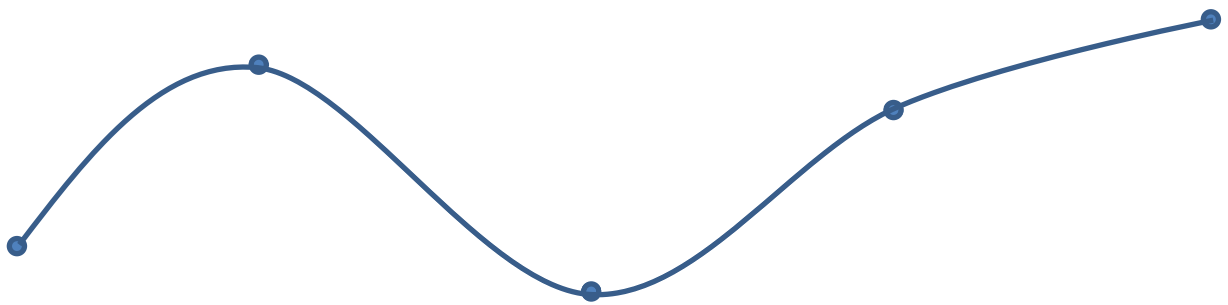
- Сделаем замену $h = d - \frac{1}{4}$
- Тогда $h_{start} = 1 - R$

При вычислении h нужно сравнивать с $-\frac{1}{4}$, но т.к. приращения целые числа, можно сравнивать с нулем

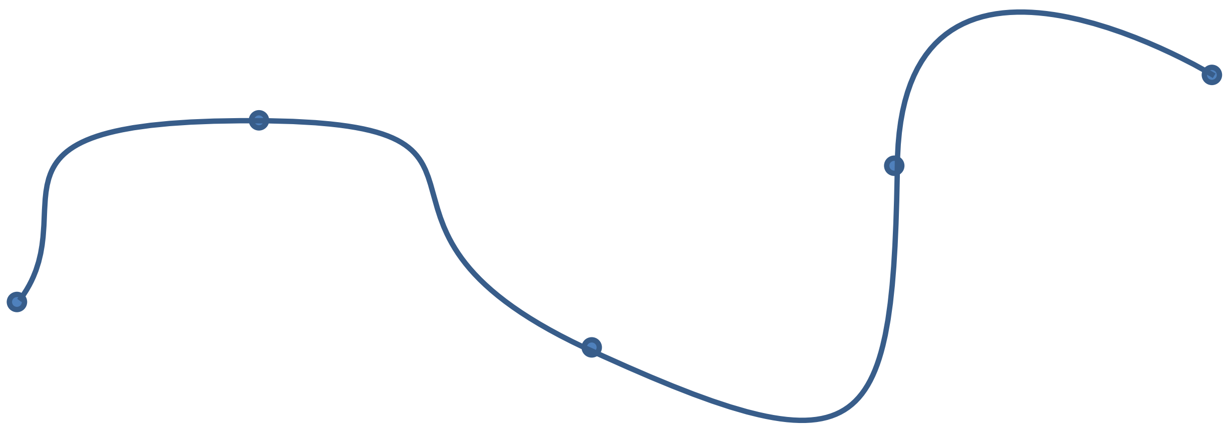
Задача: построение кривой по контрольным точкам



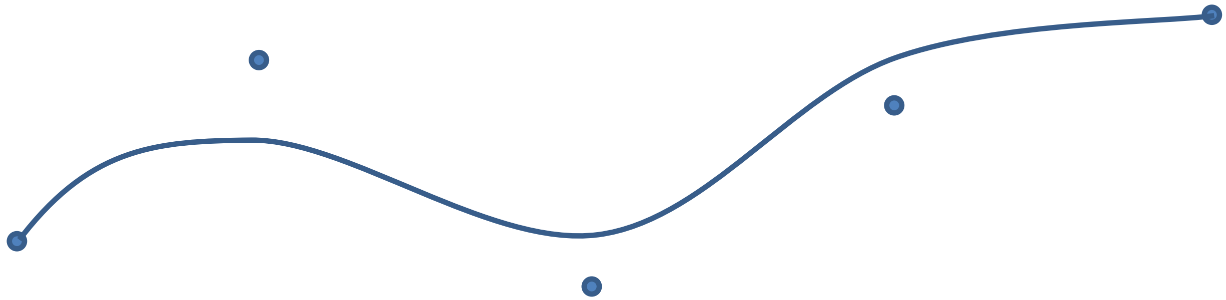
Задача: построение кривой по контрольным точкам



Задача: построение кривой по контрольным точкам



Задача: построение кривой по контрольным точкам



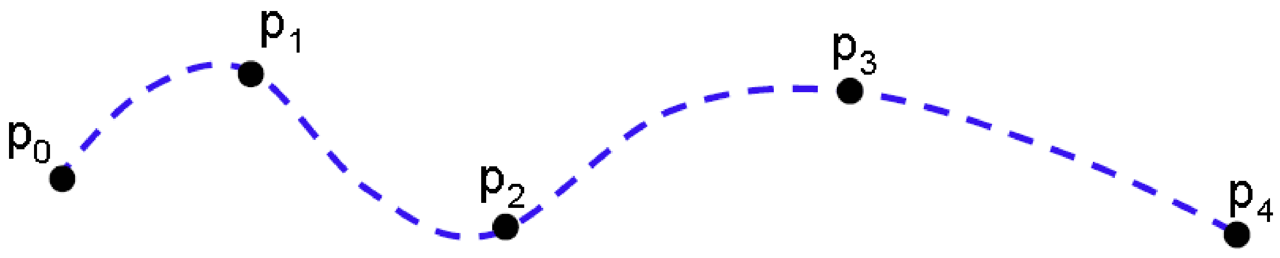
Параметрические многочлены

Для интерполяции N точек требуется многочлен степени N-1

$$x(u) = a_x + b_x u + c_x u^2 + \cdots$$

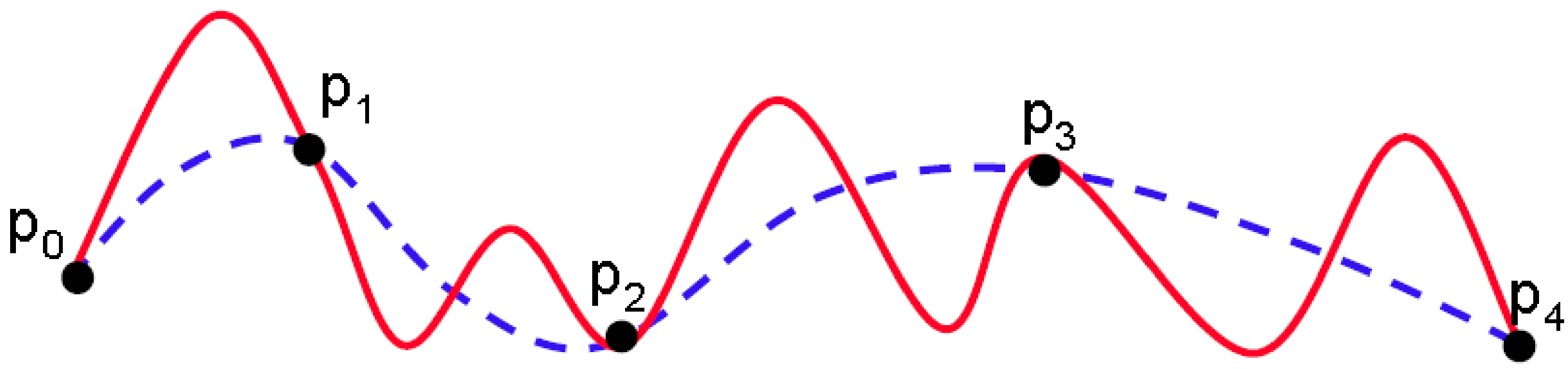
$$y(u) = a_y + b_y u + c_y u^2 + \cdots$$

$$z(u) = a_z + b_z u + c_z u^2 + \cdots$$



Параметрические многочлены имеют ряд недостатков

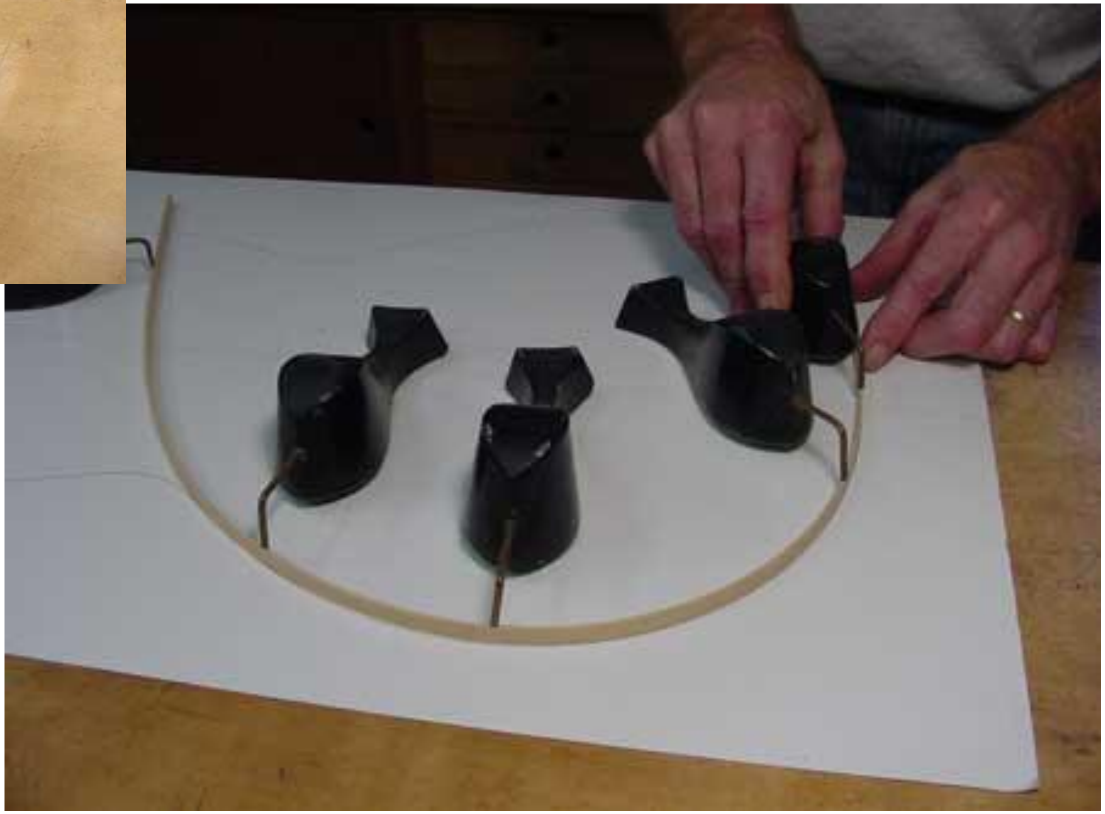
- Если степень высокая, появляются нежелательные «выбросы»



- Если степень низкая, нет контроля за ходом прямой
- Нет локальности

Сплайн в черчении

Веса для сплайнов



Сплайны: определение

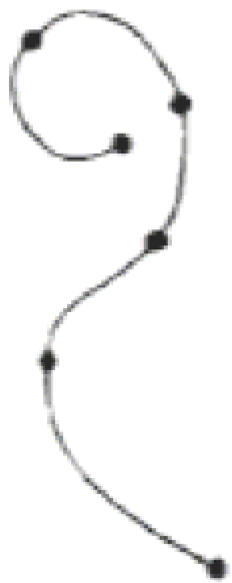
В компьютерной графике:

Составная кривая, сформированная полиномиальными участками (звеньями), которые удовлетворяют заданным условиям непрерывности (гладкости) на границах участков

В общем случае:

Функции для интерполяции или сглаживания данных

Интерполяция и аппроксимация



Интерполяция между контрольными точками. Кусочно-непрерывные полиномиальные секции.

Аппроксимация по контрольным точкам. Кусочно-непрерывные полиномиальные секции.

Применение сплайнов в компьютерной графике

- Необходимость в точном представлении криволинейных поверхностей (корпуса кораблей, самолетов, автомобилей и т.п.)
- Начало разработки в 1950х
- Безье (Bezier, Renault), Де Кастельжо (Casteljau, Citroen)
- Отрисовка сплайновых поверхностей впервые стала доступна в 1989г на графических станциях Silicon Graphics

Требования

- Математическая гладкость
- Локальный контроль
- Непрерывность
- Эффективные алгоритм вычисления

Типы непрерывности на стыках сплайнов

Гладкость на стыках («сшивка») определяется типом непрерывности.

Параметрическая непрерывность (скорость движения параметра по кривой)

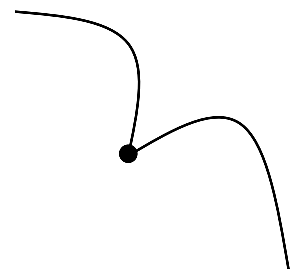
- C-1 Кривая разрывна
- C0 Кривая непрерывна
- C1 Первые производные совпадают
- C2 Первая и вторая производная совпадает

Геометрическая непрерывность

- G0 Положения крайних точек совпадают
- G1 Общее направление касательной
- G2 Общий центр кривизны

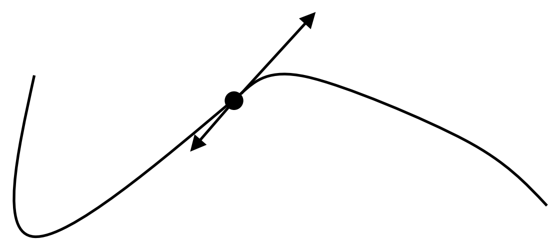
C и G непрерывность

$G^{(0)}$



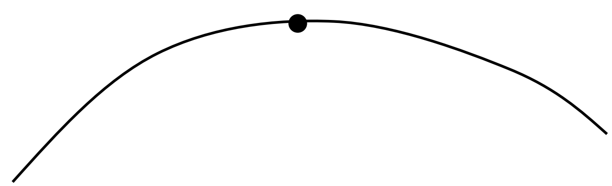
(a)

$G^{(1)}$



(b)

$G^{(2)}$



(c)

Геометрическая непрерывность

- Две вектор-функции f(s) и g(t) G(n) непрерывны, если $f^{(n)}(s) \neq 0$ и $f^{(n)}(s) = kg^{(n)}(t)$, т.е. направления векторов совпадают, а длина разная (n>0)

- Чтобы кривая выглядела гладкой, достаточно G1 непрерывности, однако для многих задач дизайна нужна более высокая степень непрерывности
- G2 – «идеально гладкая поверхность», без нее блики не выглядят гладкими

Задача

Заданы два звена сплайна

$$\alpha(t) = (t, t^2 + 1),$$
$$\beta(t) = (2t + 1, t^3 + 4t + 2),$$
$$0 \le t \le 1$$

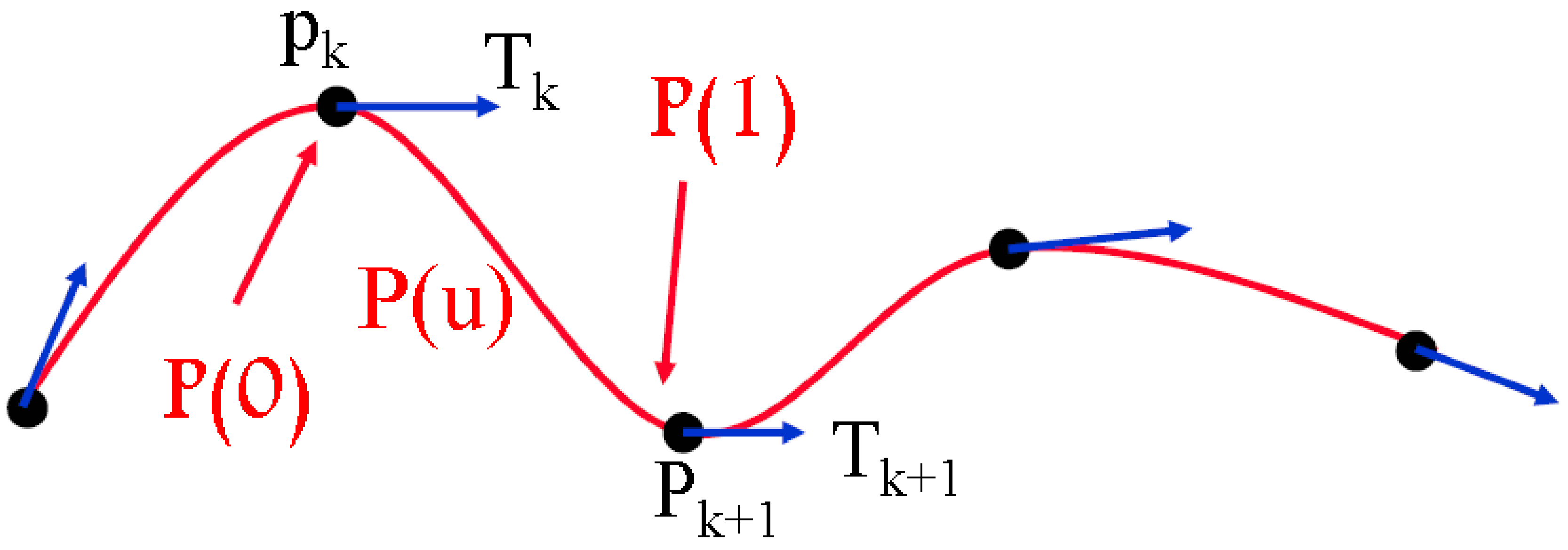
Обеспечивается ли $C0$, $C1$, $G1$ непрерывность в точке соединения α(1), β(0)?

Различные типы сплайнов по выбору интерполирующих функций

- Сплайны Эрмита
- В-сплайны
- Частный случай - полиномы Бернштейна для представления каждого отрезка сплайна (Сплайны Безье)

Сплайн Эрмита

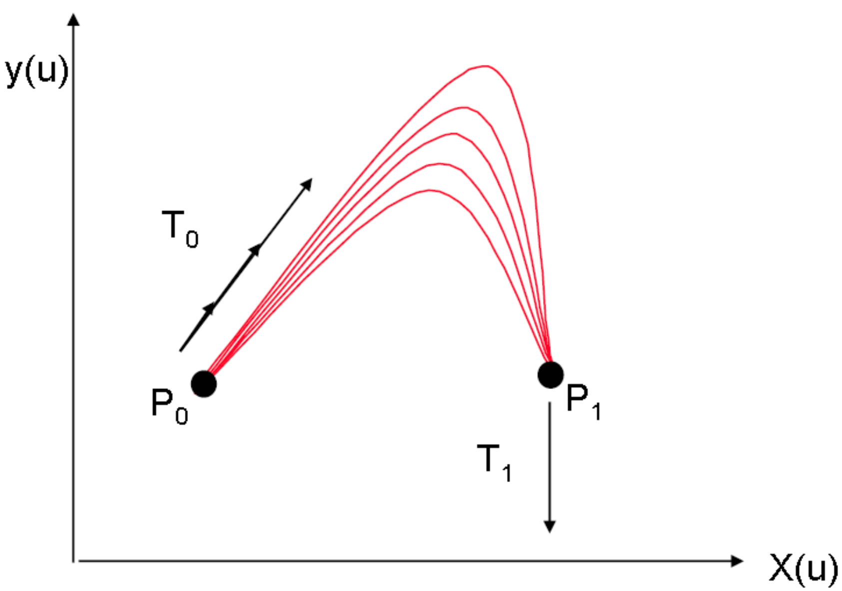
- Сплайн Эрмита – интерполирующий кусочно-кубический полином с заданной касательной в каждой точке

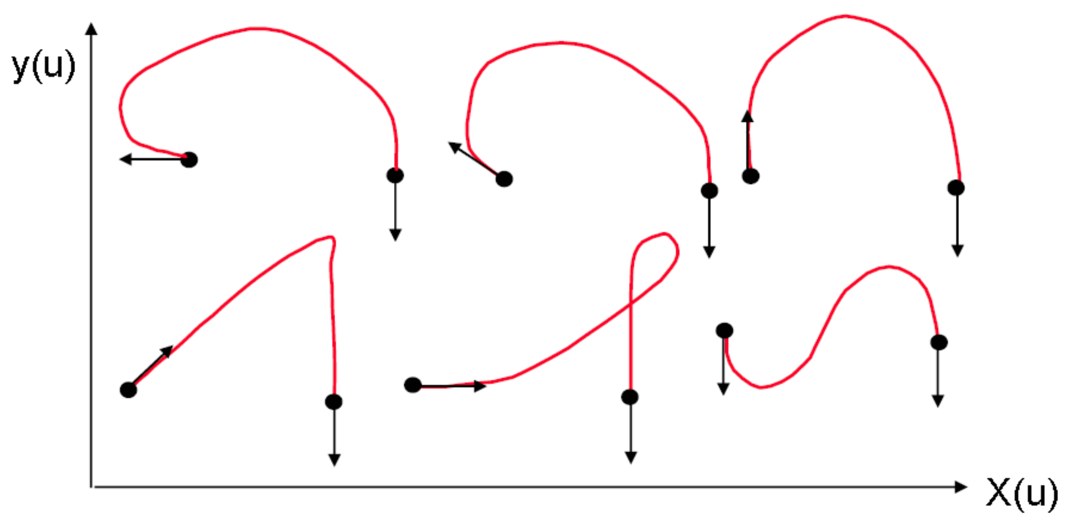


http://ae.sharif.edu/~aerocad/Curve%20Modeling-Spline.ppt

Свойства

Можно менять кривизну локально, изменяя направление и длину касательной





http://ae.sharif.edu/~aerocad/Curve%20Modeling-Spline.ppt

Вычисление функций Эрмита

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{a}u^3 + \mathbf{b}u^2 + \mathbf{c}u + \mathbf{d}, \quad 0 \le u \le 1$$

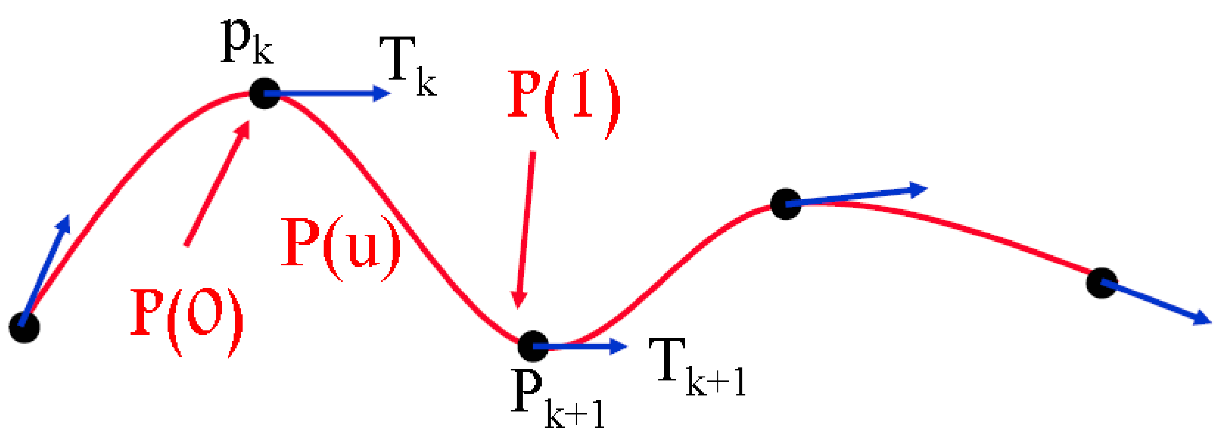
$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}_{k+1}$$

$$\mathbf{p}'(0) = \mathbf{D}\mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{p}'(1) = \mathbf{D}\mathbf{p}_{k+1}$$

Граничные условия



http://ae.sharif.edu/~aerocad/Curve%20Modeling-Spline.ppt

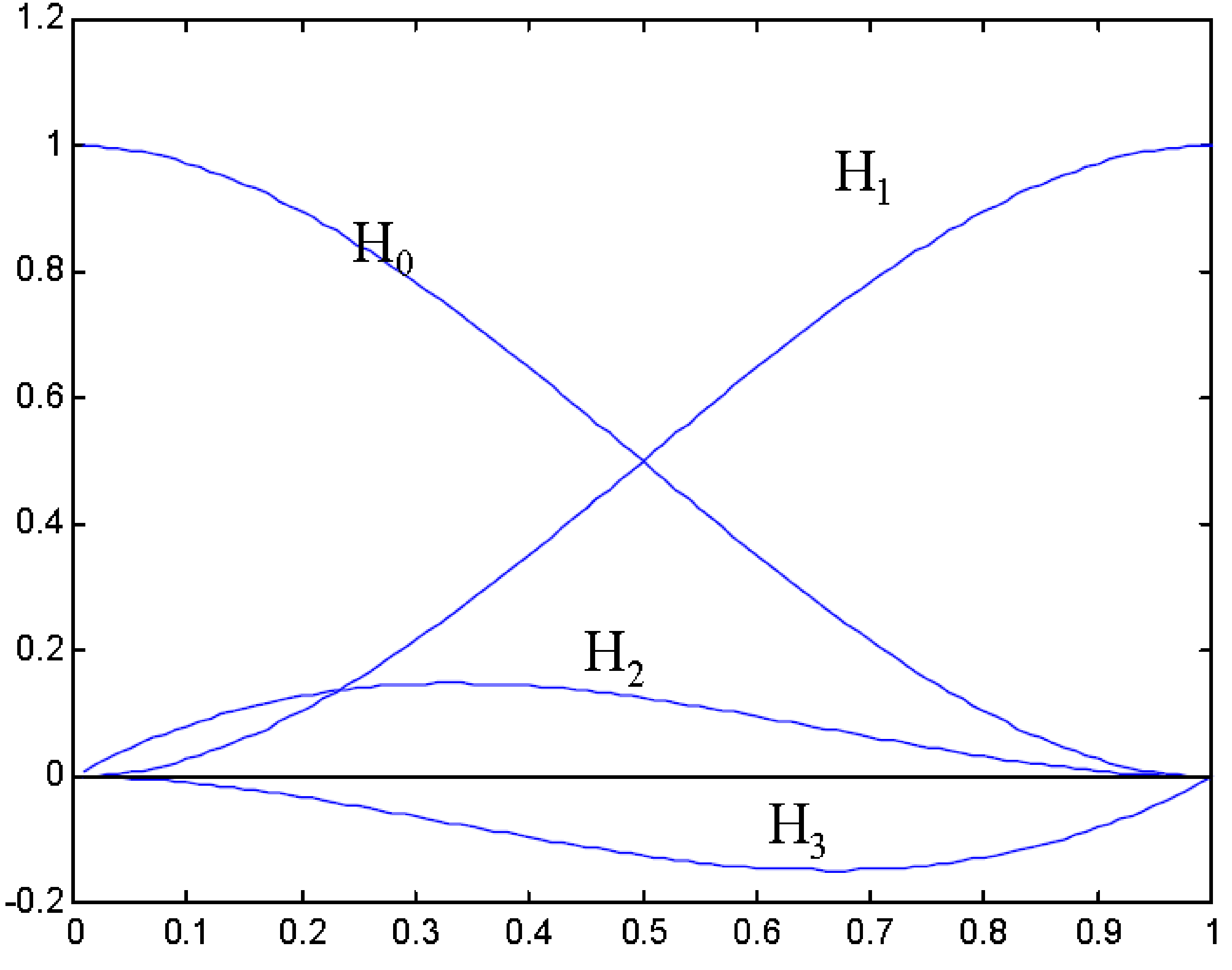
Вычисление функций Эрмита (2)

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} 2u^3 - 3u^2 + 1 & -2u^3 + 3u^2 & u^3 - 2u^2 + u & u^3 - u^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} \\ \mathbf{Dp}_k \\ \mathbf{Dp}_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{p}_k H_0(u) + \mathbf{p}_{k+1} H_1(u) + \mathbf{Dp}_k H_2(u) \mathbf{Dp}_{k+1} H_3(u)$$

http://ae.sharif.edu/~aerocad/Curve%20Modeling-Spline.ppt

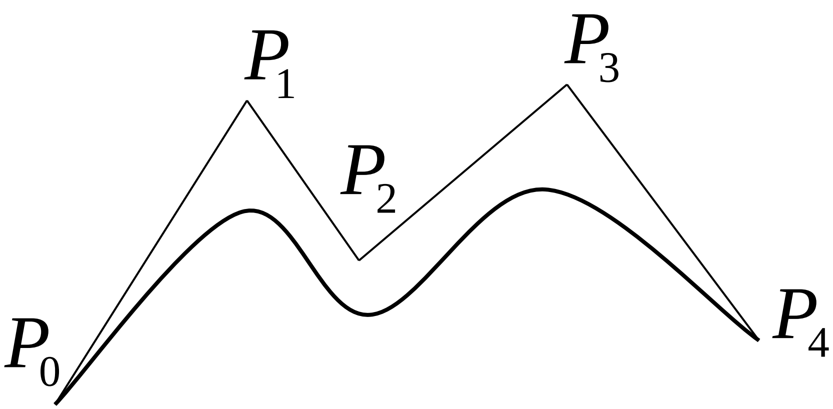
Функции Эрмита



Недостатки сплайнов Эрмита

- Главный недостаток – необходимость вручную задавать направление и длину касательных

B-Spline



$$P_i, i = 0,1,\dots, N-1.$$

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{N-1} P_i B_{i,k}(t), t_{min} \le t \le t_{max}.$$

$P_i \in R_2, R_3, R_4$ - контрольные точки

$B_{i,k}(t) \in R$ - специальные базисные функции – полиномы степени k

Сплайны Безье – часто используемый частный случай B-сплайнов

- Для сплайнов Безье – степень кривой равна N-1.
- Базис – полиномы Бернштейна

$$b_{\nu,n}(x) = \binom{n}{\nu} x^{\nu} (1-x)^{n-\nu}, \quad \nu = 0, \ldots, n. \qquad {}^{n}\mathrm{C}_i = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

- Позволяют аппроксимировать функции

Первые несколько степеней полиномов Бернштейна:

$$\begin{aligned}
&b_{0,0}(x) = 1, \\
&b_{0,1}(x) = 1-x, \quad b_{1,1}(x) = x \\
&b_{0,2}(x) = (1-x)^2, \quad b_{1,2}(x) = 2x(1-x), \quad b_{2,2}(x) = x^2 \\
&b_{0,3}(x) = (1-x)^3, \quad b_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2, \quad b_{2,3}(x) = 3x^2(1-x), \quad b_{3,3}(x) = x^3 \\
&b_{0,4}(x) = (1-x)^4, \quad b_{1,4}(x) = 4x(1-x)^3, \quad b_{2,4}(x) = 6x^2(1-x)^2, \quad b_{3,4}(x) = 4x^3(1-x), \quad b_{4,4}(x) = x^4
\end{aligned}$$

Линейные сплайны Безье

$$Q = (1 - t)P_0 + tP_1$$

- Для двух точек
- Линейная интерполяция

Квадратичные сплайны Безье

$$Q = (1 - t^2)P_0 + 2(1 - t)tP_1 + t^2P_2$$

- Для трех точек
- Проходит через P0, P2.
- Касательные в P0, P2 проходят через P1

- Используются в шрифтах TrueType

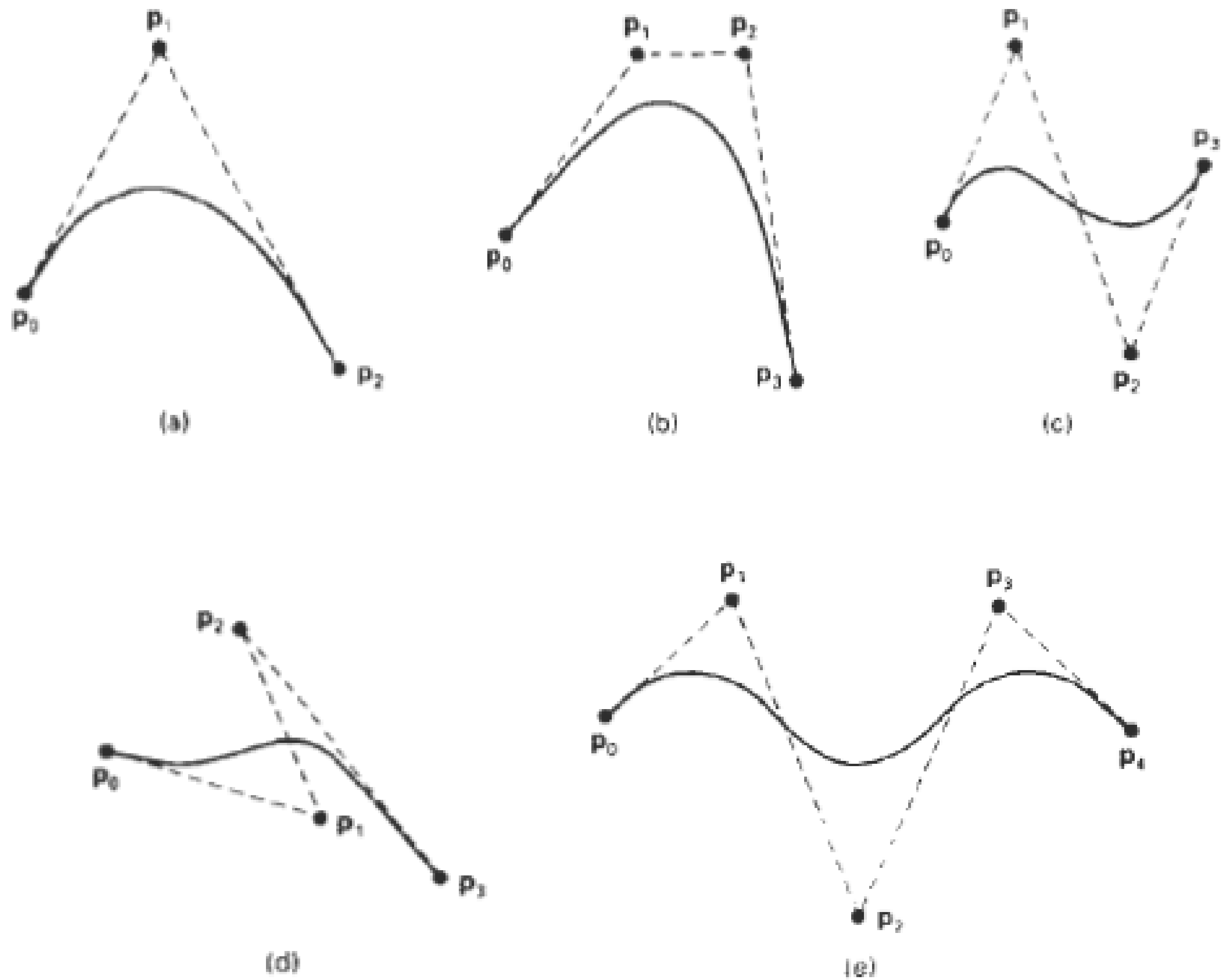
Кубические сплайны Безье

$$Q = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$$

- Для четырех точек
- Проходит через P0 в направлении P1
- Приходит в P3 с направления P2
- Обычно не проходит ни через P1, ни через P2 – они только для контроля кривизны

- Используются во многих графических редакторах

Сравнение кривых Безье разной степени (для разного количества контрольных точек)

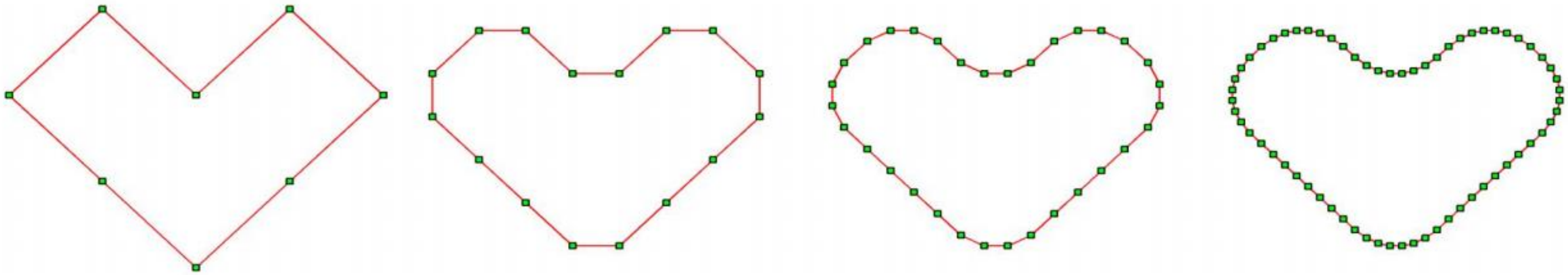


Свойства сплайнов Безье

- Проходят через первую и последнюю точку
- Касательная в первой и последней точки проходит вдоль линии, соединяющей крайнюю и ближайшую контрольную точку
- Кривая лежит полностью внутри выпуклой оболочки контрольных точек

Построение (визуализация) сплайна: функциональный и геометрический подход

- Функциональный подход: вариация параметра t.
- Геометрический подход: подразбиение

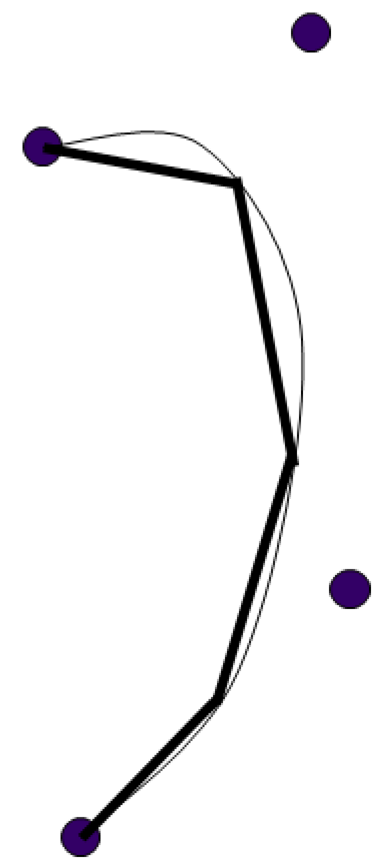


http://pages.cpsc.ucalgary.ca/~samavati/cpsc453/pdfs/modeling2.pdf

Визуализация сплайнов Безье: вариант 1

Вычислить значение координат в фиксированных точках и соединить прямыми

- Например, с помощью алгоритма Брезенхема



- Плюсы: очень простой алгоритм
- Минусы:
  - Накладные вычисления для большого количества точек
  - Как дискретизировать параметр t?
    - Как часто?
    - Адаптация?

Визуализация сплайнов Безье: вариант 2

1. Разбиваем кривую на под-кривые
2. Если контрольные точки кривой лежат близко к прямой, останавливаемся
3. Рисуем полигон, сформированный контрольными точками.

Обоснование:

- кривая Безье лежит полностью внутри выпуклой оболочки
- Если контрольные точки лежат на одной прямой, выпуклая оболочка является хорошей аппроксимацией

- Для построения под-кривых применяется алгоритм Де Костельжо

Построение кривой Безье 2-го порядка (алгоритм Де Костельжо)

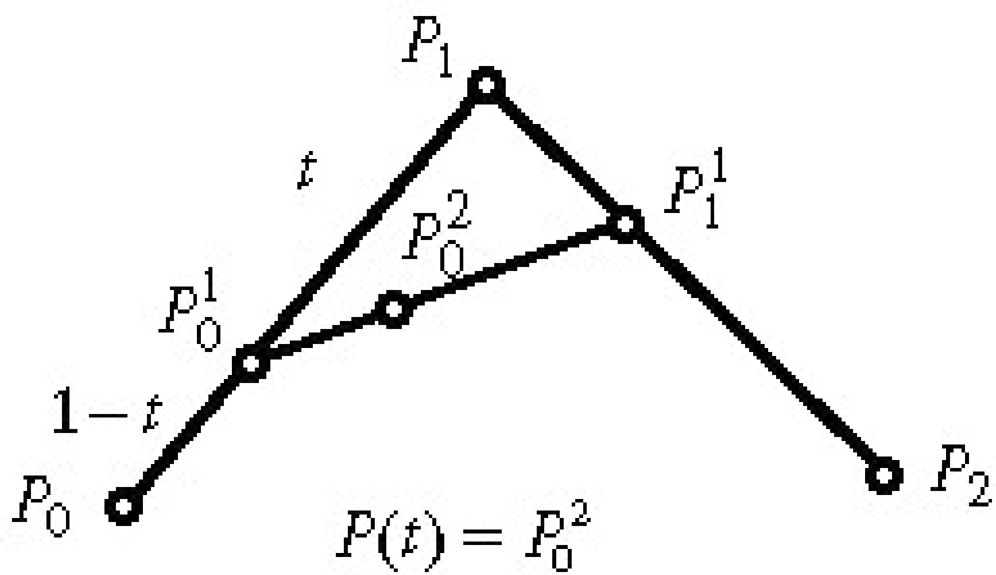
Step 1

$$P_0^1 = (1-t)P_0 + tP_1$$

$$P_1^1 = (1-t)P_1 + tP_2$$

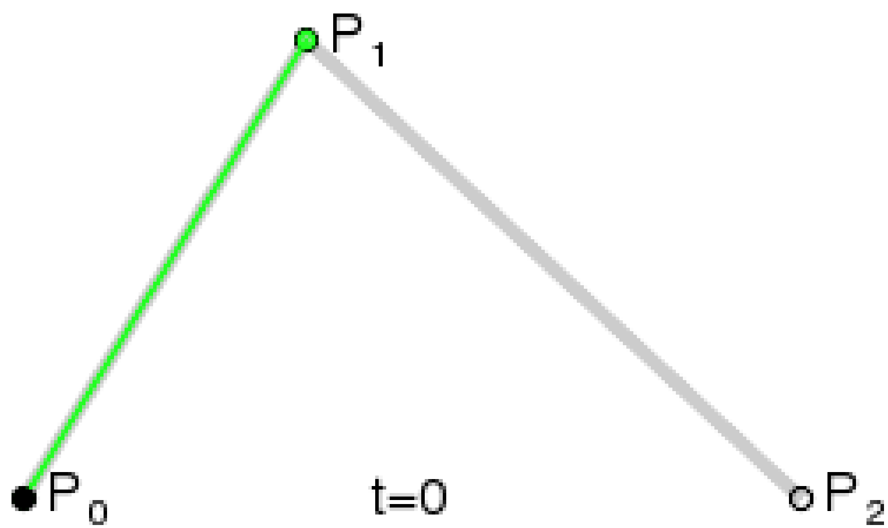
Step 2

$$P_0^2 = (1-t)P_0^1 + tP_1^1$$

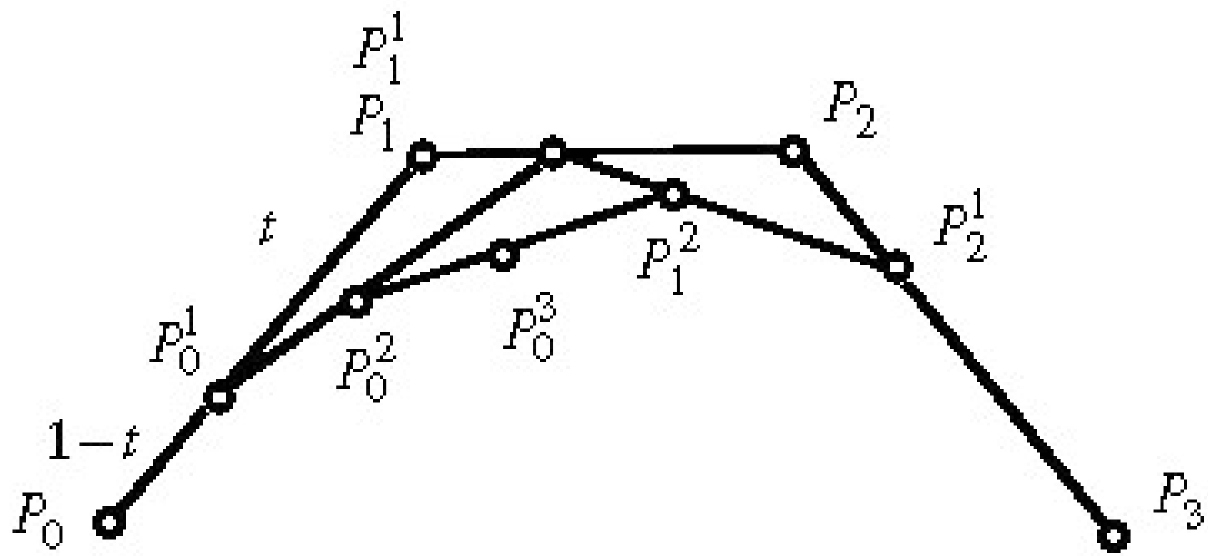


- Алгоритм применяется также для разделения сплайнов на две части.
- Новые точки становятся опорными для новых сплайнов Безье, в сумме совпадающих с исходным

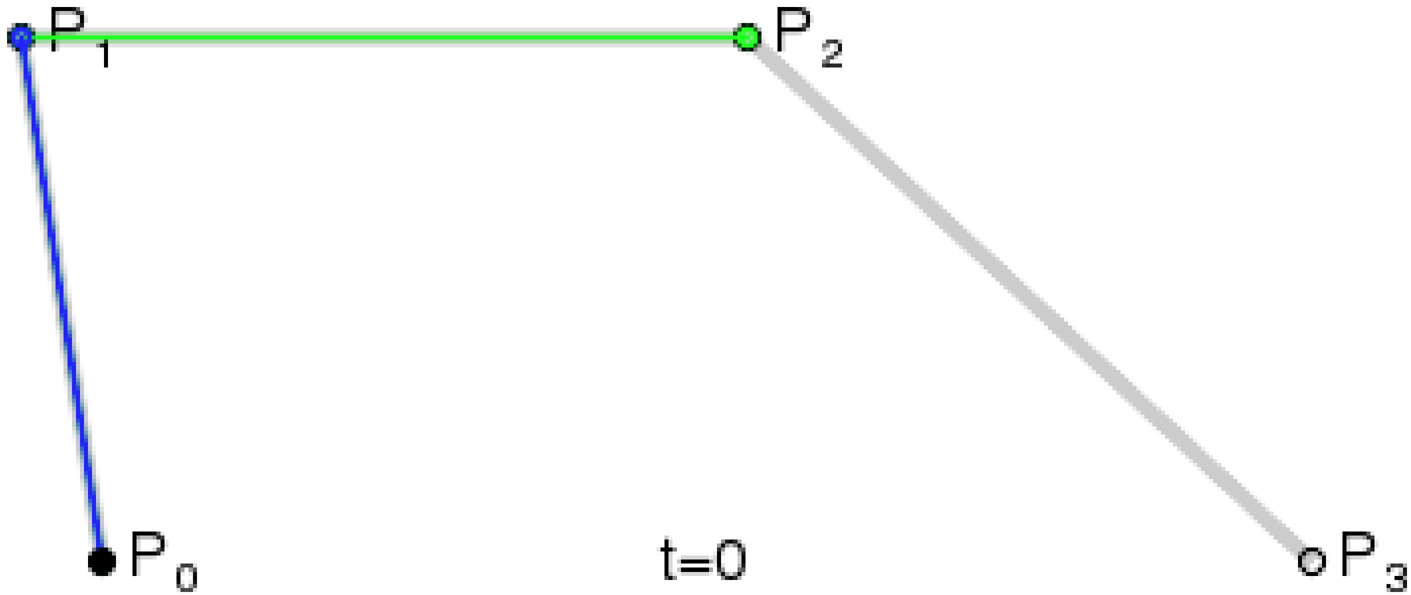
Построение кривой Безье (пример)



Построение кривой Безье 3-го порядка (алгоритм Де Костельжо)

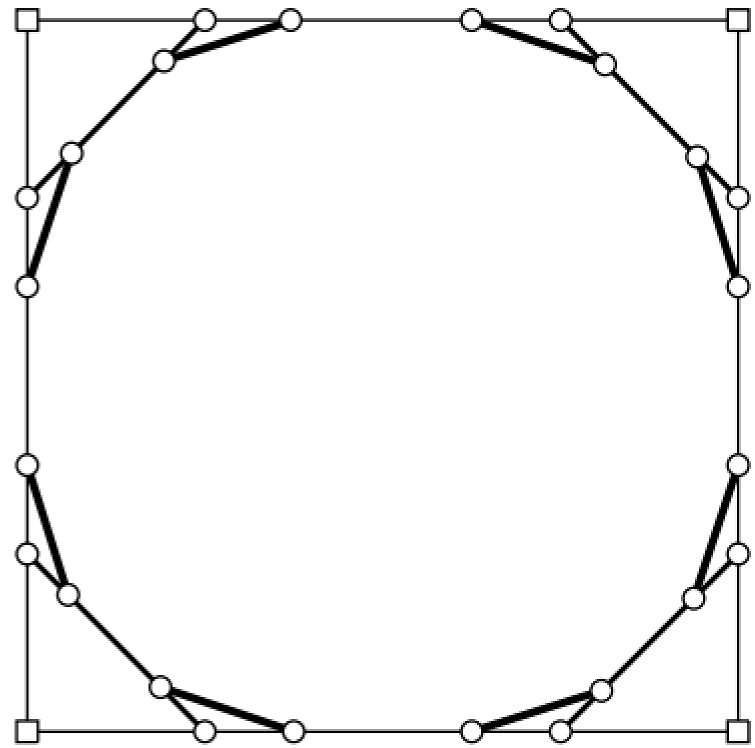


Построение кривой Безье (пример)



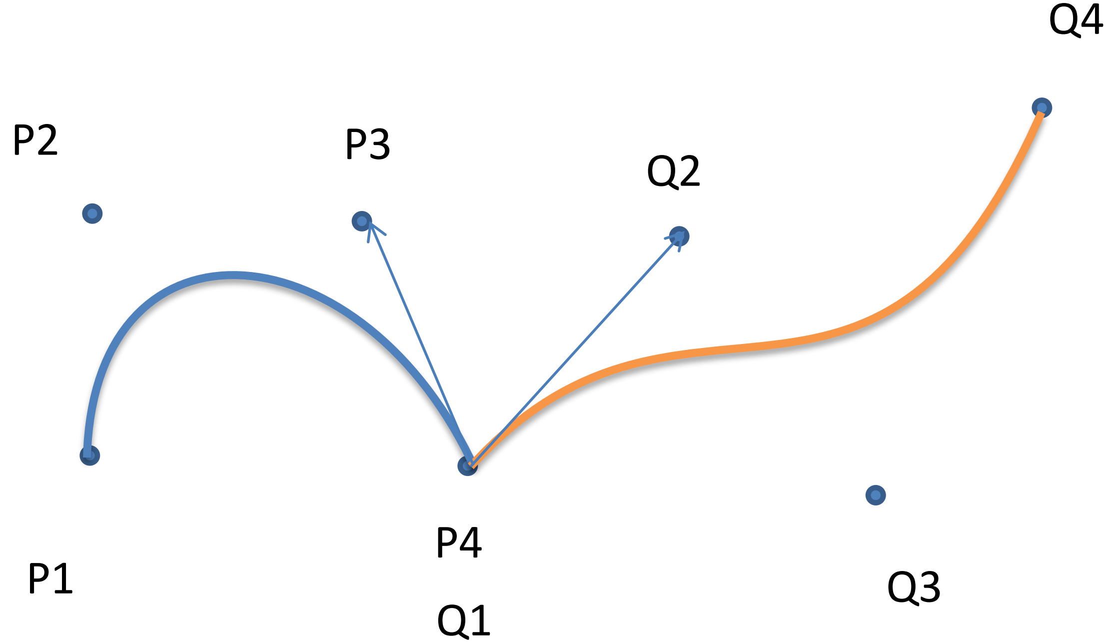
Построение B-сплайнов: Алгоритм Чайкина для построения кривой

- Магические значения ¼ и ¾
- “Срезание углов»
- На выходе – квадратичный B-сплайн



Соединение сегментов кривых Безье

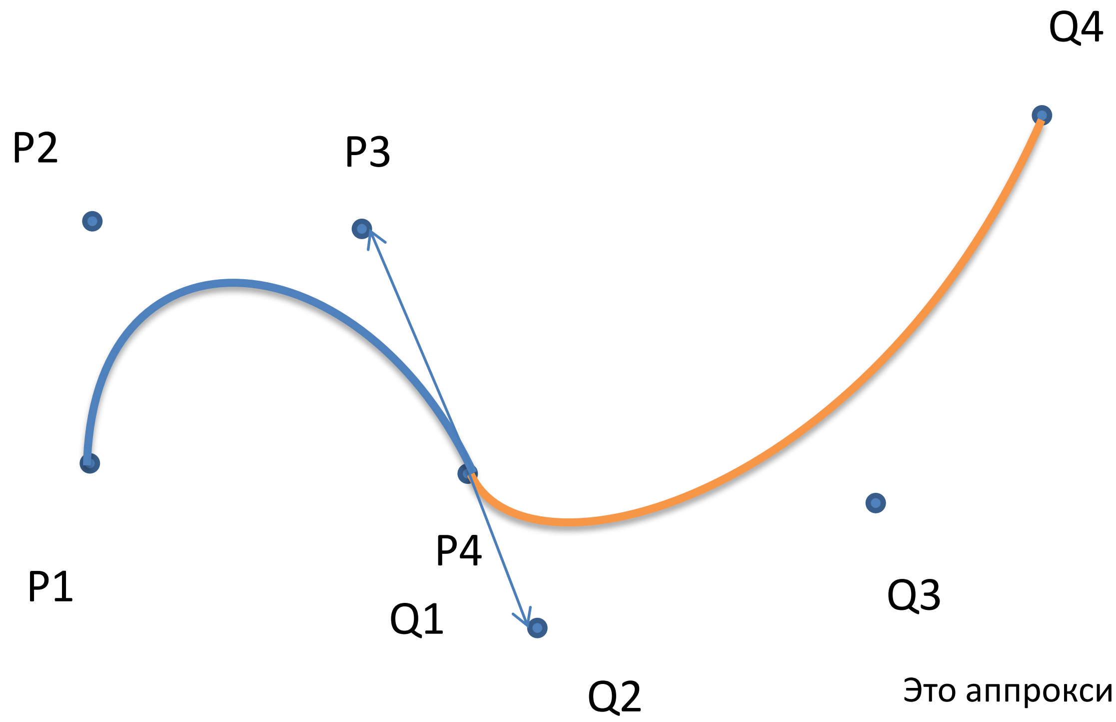
- В зависимости от расположения точек в окрестности стыка, можно получить C0 непрерывность



Это аппроксимация – кривые в PowerPoint не являются кривыми Безье!

Соединение сегментов кривых Безье

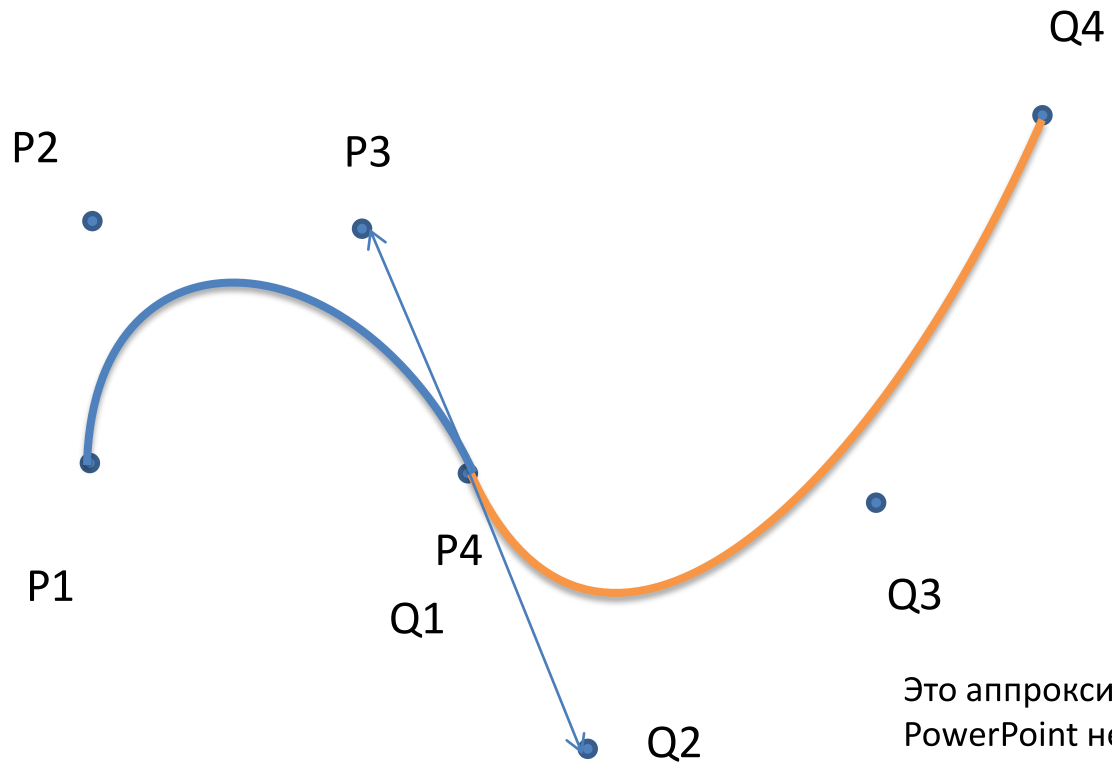
- В зависимости от расположения точек в окрестности стыка, можно получить G1 непрерывность



Это аппроксимация – кривые в PowerPoint не являются кривыми Безье!

Соединение сегментов кривых Безье

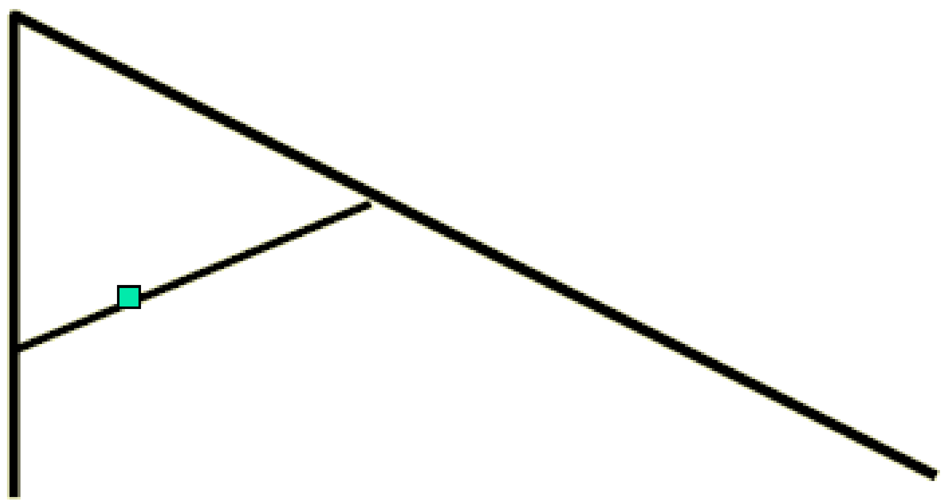
- В зависимости от расположения точек в окрестности стыка, можно получить C1 непрерывность



Это аппроксимация – кривые в PowerPoint не являются кривыми Безье!

Задача

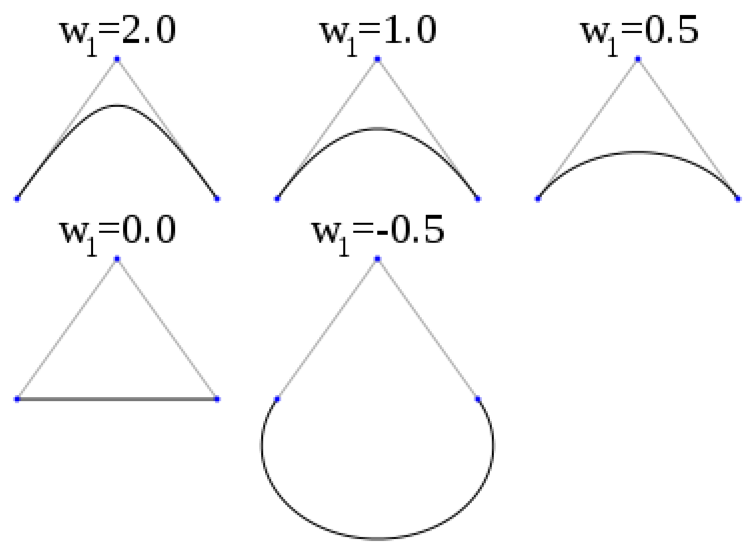
Ломаная Безье задана тремя точками (0, 0), (0, 9), (18, 0). Определите координаты точки на кривой Безье при *t = 2/3.*



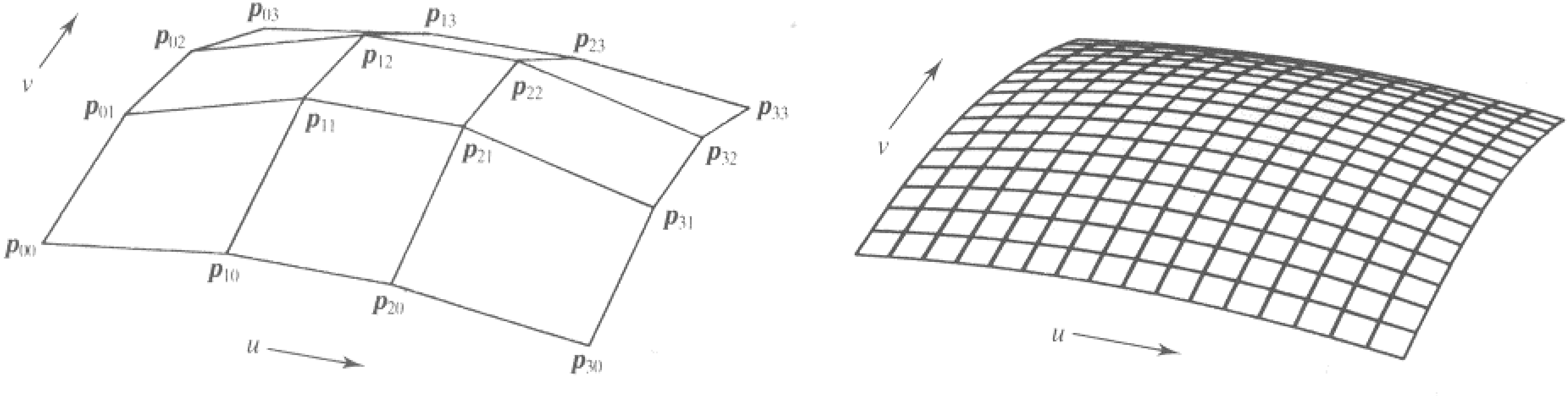
Рациональные кривые Безье

- К каждой вершине добавлен вес wi, определяющий влияние на соседние

$$Q(t) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} w_i P_i' B_{i,p}(t)}{\sum_{i=0}^{N-1} w_i B_{i,p}(t)}.$$



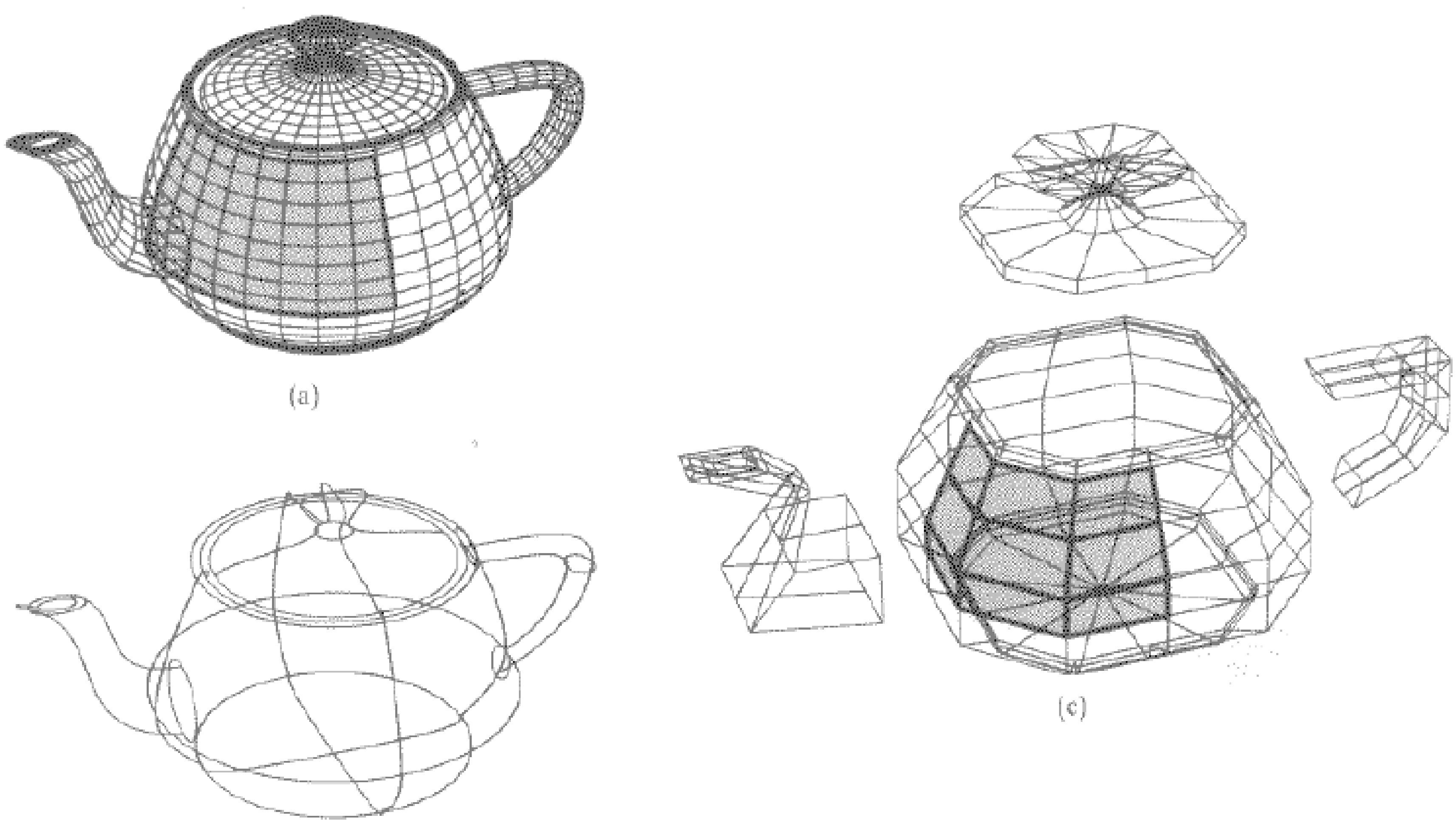
Поверхности Безье



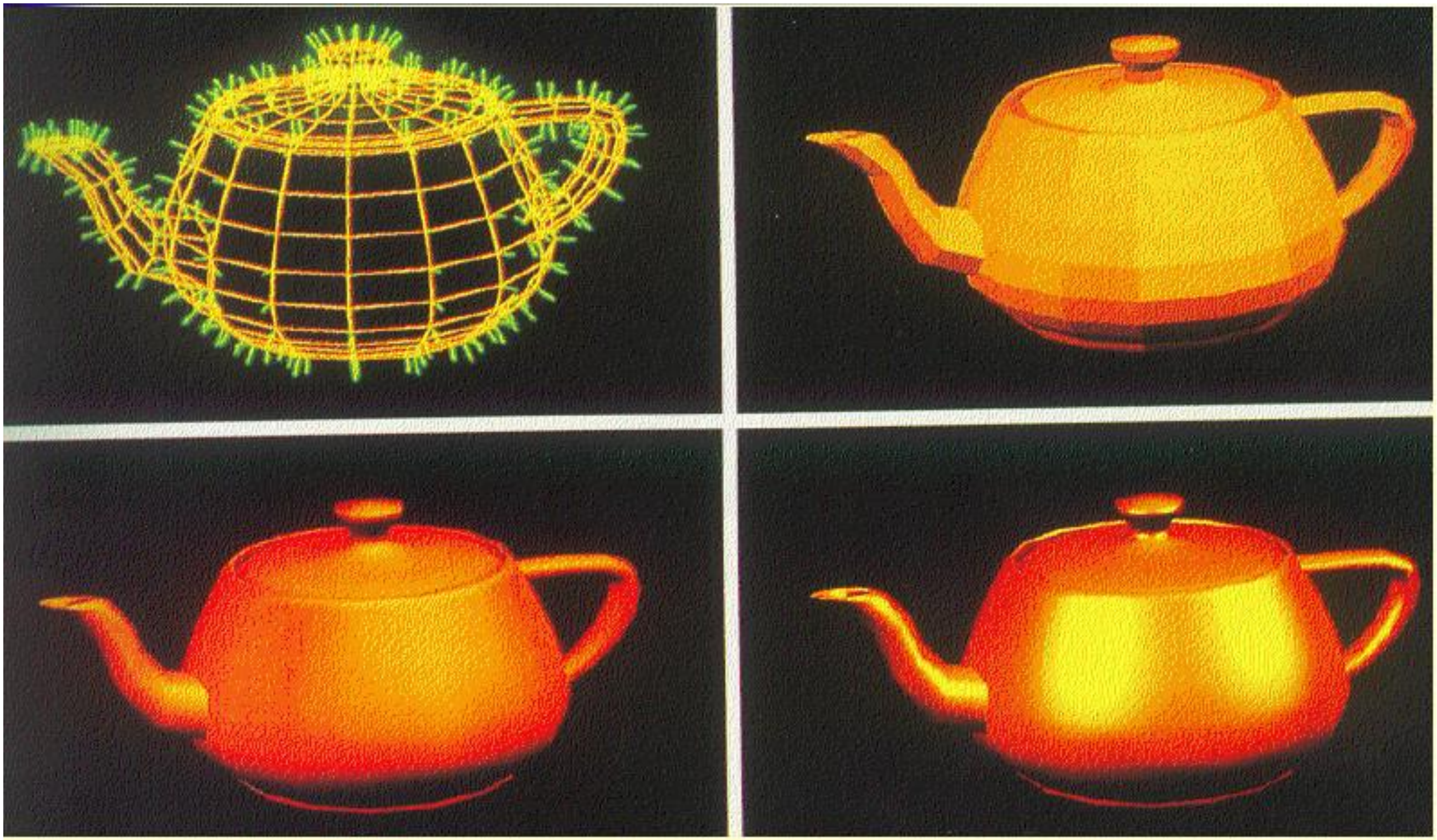
(a) (b)

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} p_{ij} b_i(u) b_j(v)$$

Моделирование с помощью сплайнов: чайник Юта (University of Utah)



Моделирование с помощью сплайнов: чайник Юта (University of Utah)



Итоги

- Алгоритм Брезенхема для прямых
- Алгоритм Брезенхема для окружностей
- Сплайновые кривые
  - Геометрическая непрерывность
  - Кривые Эрмита
  - B-сплайны
  - Кривые Безье (Полиномы Бернштейна, Алгоритм Чайкина)
  - Поверхности Безье
  - Рациональные сплайны